	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso **2024-2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	Modelo orientativo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. Sea λ un número real y considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Estudiar si existe algún valor de λ para el cual la matriz AB no tenga inversa.

b) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz BA en función del parámetro λ.

c) (1 punto) Para $\lambda = 1$, discutir el sistema $(A^t A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \\ 2a \end{pmatrix}$ según los valores de a.

Pregunta 1.2 . (2.5 puntos) Se tienen garrafas de tres tamaños diferentes para llenar un aljibe. Con seis garrafas pequeñas y 2 L se llenan exactamente una garrafa mediana y una grande. Con dos garrafas grandes llenamos dos medianas, una pequeña y sobra 1 L. El aljibe se llena al completo bien con catorce garrafas pequeñas más seis medianas, bien con cinco medianas junto con cinco grandes. Se pide calcular la capacidad de cada tipo de garrafa y, una vez conocidas estas, la del aljibe.

Bloque 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 2.1. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{si} \quad x < 2 \\ \sqrt{5x-1} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$.

a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Estudie los extremos relativos de la función en el intervalo $(1, 3)$.

c) (1 punto) Calcule el área encerrada por la función y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$.

Pregunta 2.2. Dada la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, se pide:

a) (0.5 puntos) Estudiar la paridad de la función $g(x) = f\big(x\, f(x)\big)$.

b) (1 punto) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x}$.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_0^1 x\, f(x)\, dx$.

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Sean los puntos $A(0,0,0)$ y $B(1,1,1)$, y la recta $r \equiv (x,y,z) = (\lambda, \lambda, \lambda+1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

a) (1 punto) Halle una ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

b) (1 punto) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto B.

c) (0.5 puntos) Halle una ecuación de una recta que sea paralela a r y pase por A.

Pregunta 3.2. Dados los tres planos $\pi_1 : -2x-2y+z=0$; $\pi_2 : -2x+y-2z=0$ y $\pi_3 : x-2y-2z=0$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el ángulo que forman los planos dos a dos. Determinar la intersección de los tres planos.

b) (1.5 puntos) Determinar el punto P en el espacio del que se sabe que su proyección ortogonal sobre π_1 es el punto $Q_1(1/3, 4/3, 10/3)$ y que su proyección ortogonal sobre π_2 es el punto $Q_2(-1/3, 8/3, 5/3)$. Determinar la proyección ortogonal Q_3 del punto P sobre el plano π_3.

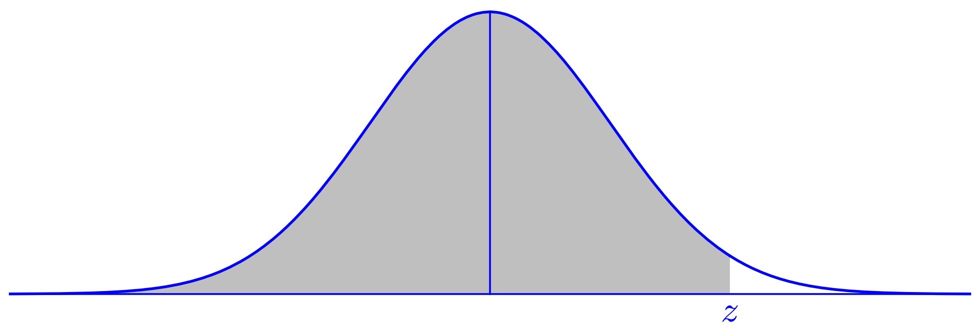
Bloque 4. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 4. Según los datos de la Comunidad de Madrid, en la temporada 2021-2022 la cobertura de la vacuna de la gripe entre mayores de 65 años fue de un $73.2\ \%$.

a) (1.5 puntos) Ante una situación de brote epidémico, las autoridades deciden restringir aquellas reuniones en las que la probabilidad de que haya más de una persona no vacunada sea mayor de 0.5. Suponiendo que los asistentes a una reunión suponen una muestra aleatoria, ¿se deberían restringir las reuniones de 5 personas mayores de 65 años? ¿Y las reuniones de 7 personas mayores de 65 años?

b) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de 500 personas mayores de 65 años. Calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 350 de ellos estén vacunados contra la gripe.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $\mathrm{N}(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Modelo

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

1.1.

a) Cálculo correcto de AB: 0.25 puntos. Discusión correcta de la existencia de inversa: 0.25 puntos.
b) Cálculo correcto de BA: 0.25 puntos. Discusión correcta del rango: 0.75 puntos.
c) Cálculo correcto de A^tA: 0.25 puntos. Discusión correcta del sistema: 0.75 puntos.

1.2.

Correcto planteamiento del problema: 1.5 puntos (0.5 puntos por cada ecuación bien planteada). Resolución correcta del sistema planteado y cálculo correcto de la capacidad del aljibe: 1 punto. En caso de resolución correcta de un sistema con alguna ecuación mal planteada, se valorará con hasta 0.5 puntos.

2.1.

a) Por la continuidad para $x \neq 2$: 0.25 puntos. Por la continuidad en $x = 2$: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo de primitivas: 0.5 puntos (0.25 puntos cada una). Aplicación correcta de la regla de Barrow: 0.25 puntos.

2.2.

a) Planteamiento : 0.25 puntos. Identificación de la paridad : 0.25 puntos.
b) Planteamiento : 0.5 puntos. Obtención del límite: 0.5 puntos.
c) Obtención de la primitiva: 0.75 puntos. Aplicación correcta de la regla de Barrow: 0.25 puntos.

3.1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

3.2.

a) Cálculo de los ángulos: 0.5 puntos. Cálculo de la intersección: 0.5 puntos. En ambos casos, 0.25 puntos por el planteamiento y 0.25 puntos por la solución.
b) Planteamiento del problema para determinar P: 0.5 puntos. Resolución para encontrar P: 0.5 puntos. Planteamiento del problema para determinar Q_3: 0.25 puntos. Resolución para encontrar Q_3: 0.25 puntos.

4.

a) Identificación de la distribución binomial: 0.25 puntos. Para cada uno de los dos casos: 0.5 puntos (planteamiento correcto de las probabilidades a calcular: 0.25 puntos; cálculo correcto de las probabilidades: 0.25 puntos). Respuesta final correcta a la pregunta: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos. El cálculo sin corrección por continuidad, o una incorrecta, se penalizará con 0.25 puntos.

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

1.1.

a) La matriz $AB = \begin{pmatrix} 2\lambda & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene determinante $-1 \neq 0$ para cualquier λ, de manera que no existe ningún valor de λ con el que AB no sea invertible. $AB = \begin{pmatrix} 2\lambda & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) La matriz $BA = \begin{pmatrix} \lambda & 1+\lambda^2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix}$ tiene determinante 0. Puesto que el determinante $\begin{vmatrix} 1+\lambda^2 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1+\lambda^2$, de uno de sus menores 2×2, no se anula para ningún valor de λ, el rango de A es 2 para cualquier λ.

c) Para $\lambda = 1$, $A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, de manera que el sistema planteado tiene matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 2 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & 2 & 2a \end{array}\right) \text{ equivalente por filas a } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a^2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(2-a) \end{array}\right).$$

Se tiene así que rango$(AA^t) = 2$ por lo que el sistema será compatible indeterminado para $a = 0$ o $a = 2$ e incompatible si $a \notin \{0, 2\}$.

1.2.

Si x es la capacidad (en litros) de cada garrafa grande, y la de las intermedias, y z la de las pequeñas, las ecuaciones que se plantean son $6z + 2 = x + y$, $2x = 2y + z + 1$ y $14z + 6y = 5y + 5x$, de manera que x, y, z son las soluciones al sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y - 6z & = & 2 \\ 2x - 2y - z & = & 1 \\ 5x - y - 14z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Al resolver el sistema se obtiene que la capacidad de cada garrafa de las grandes es de 37 L, 31 L la de las intermedias, y 11 L las pequeñas. El aljibe se llena con $14 \cdot 11 + 6 \cdot 31 = 5 \cdot 31 + 5 \cdot 37 = 340$ L.

2.1.

a) Si $x \neq 2$ la función es continua por las propiedades de las funciones continuas. En $x = 2$, dado que $f(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{5x-1} = \lim\limits_{x\to 2^-} x^2 - 6x + 11 = 3$, la función es continua en $\mathbb{R}$.

b) La derivada de f en $(1, 2)$ es $f'(x) = 2x - 6$, que es negativa en todo el intervalo. La derivada de f en $(2, 3)$ es $\dfrac{5}{2\sqrt{5x-1}}$, que es positiva en todo el intervalo. Por tanto, el único extremo relativo de $f(x)$ en el intervalo $(1, 3)$ se alcanza en $x = 2$ y es un mínimo.

c) La función es positiva entre dichos valores por lo que el área requerida es

$$A = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^2 x^2 - 6x + 11\,dx + \int_2^3 \sqrt{5x-1}\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 11x\right]_1^2 + \left[\frac{2}{15}(5x-1)^{3/2}\right]_2^3$$

$$= \frac{13}{3} + \frac{2}{15}\left((14)^{3/2} - 27\right) = \frac{11}{15} + \frac{28}{15}\sqrt{14}.$$

2.2.

a) Dado que $f(x)$ es impar ($f(-x) = -f(x)$), tenemos que

$$g(-x) = f\big((-x)f(-x)\big) = f\big((-x)(-f(x))\big) = f\big(xf(x)\big) = g(x),$$

luego g es par.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x} = \frac{0}{0}$(indet.) $\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3f'(x)}{2(\sqrt{4+3f(x)})} = \lim_{x\to 0} \frac{3(\pi/2)\cos(\pi x/2)}{2(\sqrt{4+3\mathrm{sen}\,(\pi x/2)})} = \frac{3\pi}{8}$.

c) Integrando por partes,

$$\int_0^1 x\, f(x)\, dx = \left[-\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{4}{\pi^2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \frac{4}{\pi^2}.$$

3.1.

a) El plano buscado tendrá como vector normal a $(1,1,1)$, que es el vector director de la recta que pasa por A y B; el punto medio del segmento AB es $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Por tanto, el plano es $x+y+z=\frac{3}{2}$.

b) Sea $P(1,1,2)$ un punto de r. El vector normal del plano buscado es $(1,1,1)\times(0,0,1) = (1,-1,0)$, donde $(1,1,1)$ es vector director de la recta y $(0,0,1)$ es el vector $\overrightarrow{BP}$. Por tanto el plano buscado es $x-y=0$.

c) La recta buscada es $(x,y,z) = (\lambda,\lambda,\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

3.2.

a) Los vectores $\vec{n}_1 = (-2,-2,1)$, $\vec{n}_2 = (-2,1,-2)$ y $\vec{n}_3 = (1,-2,-2)$ son vectores normales de los planos π_1, π_2 y π_3 respectivamente. Se tiene que $\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j = 0$, para todo $i\neq j$. Así los planos son perpendiculares dos a dos.
El punto de corte satisface el sistema

$$\left.\begin{array}{c} -2x-2y+z=0 \\ -2x+y-2z=0 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\}$$

Tres planos perpendiculares sólo pueden tener un único punto de corte, por lo que ya sabemos que el sistema es compatible determinado. Como es homogéneo, la única solución es $(0,0,0)$.

b) La recta que pasa por Q_1 y es perpendicular a π_1 es $(1/3-2\lambda, 4/3-2\lambda, 10/3+\lambda)$. La recta que pasa por Q_2 y es perpendicular a π_2 es $(-1/3-2\mu, 8/3+\mu, 5/3-2\mu)$. La intersección de ambas se da para $\lambda=-1/3$ y $\mu=-2/3$, que es el punto $P(1,2,3)$.
La proyección de P en π_3 es el resultado de la intersección de la recta $(1+\lambda, 2-2\lambda, 3-2\lambda)$ con $x-2y-2z=0$, que da como solución $\lambda=1$, es decir, el punto $Q_3(2,0,1)$.

4.

a) La variable aleatoria X = "*número de personas mayores no vacunadas de gripe en una muestra de m personas*" sigue una distribución Binomial$(n=m, p=1-0.732=0.268)$. Una reunión de m personas debe restringirse si $P(X>1)>0.5$. Para una reunión de 5 personas,

$$P(X>1) = 1-P(X=0)-P(X=1) = 1-0.732^5 - 5\cdot 0.268\cdot 0.732^4 \approx 0.405,$$

y la reunión no debe restringirse.
Para una reunión de 7 personas, $P(X>1) = 1-0.732^7 - 7\cdot 0.268\cdot 0.732^6 \approx 0.599$, y sí debe restringirse.

b) Para $n=500$, la variable aleatoria X sigue una distribución Binomial$(n=500, p=0.268)$, de media 134 y desviación típica $\sqrt{98.088}\approx 9.90$. La probabilidad buscada es $P(X\leq 150)$. Aproximando X por una distribución normal $Y=N(134, 9.90)$ y tipificando a $Z=N(0,1)$ obtenemos

$$P(X\leq 150)\approx P(Y\leq 150.5) = P\left(Z\leq \tfrac{150.5-134}{9.90}\right)\approx P(Z\leq 1.67)\approx 0.9525.$$

Documento de orientaciones para la PAU 2025

MATEMÁTICAS II–Curso 2024/25

El examen constará de siete problemas distribuidos en cuatro bloques correspondientes a Álgebra, Geometría, Análisis y Probabilidad. La evaluación de cada uno de los bloques tendrá la misma ponderación.

En uno de los cuatro bloques habrá una pregunta obligatoria de carácter competencial. La pregunta competencial puede corresponder a cualquiera de los cuatro bloques mencionados anteriormente.

En los tres bloques restantes se deberá responder exclusivamente a una pregunta de las dos dadas. Si se respondiese a ambas preguntas solo se corregirá la pregunta que aparezca físicamente primero.

Los problemas estarán diseñados para evaluar las competencias específicas que figuran en el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato, y en el Decreto 64/2022 (BOCM de 26 de Julio) por el que se establecen para la Comunidad de Madrid la ordenación y el currículo del Bachillerato.

Se podrá pedir en los problemas la realización de tareas acerca de los contenidos correspondientes a la materia Matemáticas II, tal y como aparecen en el Decreto 64/2022.

La extensión y nivel de dificultad de los problemas propuestos serán similares a los de cursos anteriores.