



UNIVERSIDAD  
POLITÉCNICA  
DE MADRID

PROCESO DE  
COORDINACIÓN DE LAS  
ENSEÑANZAS PR/CL/001

Escuela Politécnica de  
Enseñanza Superior

# ANX-PR/CL/001-01

## GUÍA DE APRENDIZAJE

### ASIGNATURA

**305000139 - Modelización De Fenómenos Estocásticos**

### PLAN DE ESTUDIOS

30GM - Grado En Matematicas

### CURSO ACADÉMICO Y SEMESTRE

2024/25 - Segundo semestre

## Índice

---

### Guía de Aprendizaje

1. Datos descriptivos.....	1
2. Profesorado.....	1
3. Conocimientos previos recomendados.....	2
4. Competencias y resultados de aprendizaje.....	2
5. Descripción de la asignatura y temario.....	5
6. Cronograma.....	7
7. Actividades y criterios de evaluación.....	11
8. Recursos didácticos.....	13
9. Otra información.....	14

## 1. Datos descriptivos

---

### 1.1. Datos de la asignatura

<b>Nombre de la asignatura</b>	305000139 - Modelización de Fenómenos Estocásticos
<b>No de créditos</b>	6 ECTS
<b>Carácter</b>	Optativa
<b>Curso</b>	Cuarto curso
<b>Semestre</b>	Octavo semestre
<b>Período de impartición</b>	Febrero-Junio
<b>Idioma de impartición</b>	Castellano
<b>Titulación</b>	30GM - Grado en Matematicas
<b>Centro responsable de la titulación</b>	30 - Escuela Politecnica De Enseñanza Superior
<b>Curso académico</b>	2024-25

## 2. Profesorado

---

### 2.1. Profesorado implicado en la docencia

<b>Nombre</b>	<b>Despacho</b>	<b>Correo electrónico</b>	<b>Horario de tutorías *</b>
Jose Angel Capitan Gomez (Coordinador/a)	ETSEM	ja.capitan@upm.es	Sin horario. Concertar por correo electrónico.

\* Las horas de tutoría son orientativas y pueden sufrir modificaciones. Se deberá confirmar los horarios de tutorías con el profesorado.

## 3. Conocimientos previos recomendados

---

### 3.1. Asignaturas previas que se recomienda haber cursado

- Estadística Multivariante
- Programación
- Cálculo En Varias Variables
- Álgebra Lineal
- Estadística
- Cálculo En Una Variable
- Probabilidad
- Investigación Operativa

### 3.2. Otros conocimientos previos recomendados para cursar la asignatura

- Los conocimientos adquiridos en semestres anteriores

## 4. Competencias y resultados de aprendizaje

---

### 4.1. Competencias

CB3 - Que los estudiantes tengan la capacidad de reunir e interpretar datos relevantes (normalmente dentro de su área de estudio) para emitir juicios que incluyan una reflexión sobre temas relevantes de índole social, científica o ética

CB4 - Que los estudiantes puedan transmitir información, ideas, problemas y soluciones a un público tanto especializado como no especializado

CE10 - Utilizar herramientas de búsqueda de recursos bibliográficos en Matemáticas.

CE5 - Comprobar con demostraciones hipótesis sobre un objeto matemático o refutarlas con contraejemplos, así como identificar errores en razonamientos incorrectos.

CE6 - Proponer, analizar, validar e interpretar modelos matemáticos de sistemas reales, utilizando las herramientas matemáticas más adecuadas a los fines que se persigan, explicitando las características del sistema recogidas en el modelo y las no consideradas en el mismo.

CE7 - Resolver problemas de Matemáticas, mediante habilidades de cálculo básico y tecnologías de computación, planificando su resolución en función de las herramientas de que se disponga y de las restricciones de tiempo y recursos.

CE8 - Utilizar aplicaciones informáticas de análisis estadístico, cálculo numérico y simbólico, visualización gráfica, optimización u otras para experimentar en Matemáticas, buscar soluciones y resolver modelos matemáticos de sistemas reales.

CG4 - Utilizar los conocimientos teóricos y prácticos adquiridos en la definición y planteamiento de problemas y en la búsqueda de sus soluciones tanto en contextos académicos como profesionales.

CG5 - Sintetizar conocimientos y habilidades adquiridas en el campo de la matemática en diferentes materias del plan de estudios para enfocarlas en posteriores estudios especializados, tanto en una disciplina matemática como en cualquiera de las ciencias que requieran buenos fundamentos matemáticos.

CT1 - Trabajar dentro de un equipo, en entornos interdisciplinarios y complejos, negociando y resolviendo conflictos, diseñando soluciones eficientes, fiables, robustas y responsables.

CT2 - Organizar y planificar tareas y proyectos, identificando objetivos, prioridades, plazos, recursos y riesgos, y controlando los procesos establecidos.

CT4 - Mostrar capacidad para innovar y encontrar soluciones creativas en situaciones complejas o de incertidumbre.

CT8 - Mostrar capacidad para comunicar ideas, problemas y soluciones, tanto a público especializado como no especializado, de manera oral y escrita.

## 4.2. Resultados del aprendizaje

RA184 - A partir de problemas reales plantear, modelizar y resolver procesos de Markov así como interpretar las soluciones obtenidas.

RA73 - Asociar y aplicar el modelo probabilístico adecuado al problema propuesto

RA178 - Construir un modelo matemático de un fenómeno real. Identificar todos los componentes de este. Evaluar la calidad del modelo e interpretar los resultados.

RA139 - Conocer y seleccionar adecuadamente las herramientas matemáticas necesarias para formular, analizar y simular modelos matemáticos

RA141 - Distinguir y separar entre modelos lineales o no lineales, con variables continuas o discretas, deterministas o estocásticas. Enunciar y distinguir las variables que se van a modelizar.

RA145 - Calibrar los modelos mediante datos observacionales y validarlos contra datos observacionales independientes o mediante simplificaciones de los modelos resolubles de forma exacta.

RA140 - Plantear, resolver e interpretar modelos matemáticos de problemas aplicados

RA235 - Simular procesos estocásticos con el ordenador con el algoritmo de Gillespie.

RA183 - Modelizar problemas reales como procesos estocásticos. Identificar los distintos tipos de problemas, así como sus parámetros en dichos problemas.

RA233 - Resolver ecuaciones diferenciales estocásticas sencillas.

RA234 - Analizar y simular procesos estocásticos de Markov en tiempo continuo.

RA144 - Analizar la sensibilidad de los modelos utilizados respecto a sus parámetros.

RA66 - Resolver e interpretar el resultado de un modelo matemático de un problema aplicado sencillo.

RA75 - Construir modelos probabilísticos básicos

## 5. Descripción de la asignatura y temario

---

### 5.1. Descripción de la asignatura

La gran mayoría de los fenómenos físicos, naturales, económicos y sociales tienen un carácter intrínsecamente estocástico. Ejemplos de ello son el movimiento de partículas en suspensión sobre un fluido, las fluctuaciones en la transmisión de genes entre generaciones, la variabilidad en saltos discretos de los números poblacionales en comunidades ecológicas, la distribución de tiempos de espera en colas de supermercado, o las fluctuaciones temporales de los precios de activos bursátiles.

El conocimiento de cómo se modelizan matemáticamente estos fenómenos es esencial para los estudiantes de un grado en matemáticas. Por un lado, porque los modelos estocásticos basados en procesos elementales dan solidez y fundamentan a los modelos deterministas, que no son más que el límite de bajas fluctuaciones del caso estocástico. Por otro lado, porque cualquier modelización realista de un fenómeno natural ha de incorporar el efecto del ruido, las fluctuaciones y la aleatoriedad en las funciones de respuesta que habitualmente se observan en el mundo real o se miden en experimentos.

Esta asignatura dará al estudiante una panorámica global y rigurosa a la modelización de procesos estocásticos. Se hará énfasis en los modelos, exponiendo los contenidos partiendo de situaciones reales y fenómenos concretos en Física, Biología o Ciencias Sociales, en los que sea evidente la necesidad de establecer un modelo estocástico. Los modelos concretos servirán como ejemplo para establecer, de forma rigurosa, los conceptos y resultados matemáticos de la teoría de procesos estocásticos, sirviendo de motivación para el establecimiento del marco matemático general.

## 5.2. Temario de la asignatura

1. Cadenas de Markov en tiempo discreto.
  - 1.1. Modelo de Fisher-Wright de herencia genética.
  - 1.2. Definición de cadena de Markov. Propiedades.
  - 1.3. Dinámica temporal. Distribución asintótica.
  - 1.4. Recurrencia, regularidad. Accesibilidad. Tiempos de primer paso.
2. Cadenas de Markov en tiempo continuo.
  - 2.1. Desintegración radioactiva. Procesos de Poisson.
  - 2.2. Cinética de reacciones químicas. Modelos poblacionales.
  - 2.3. Definiciones. Propiedades. Ecuación de Kolmogorov hacia adelante.
  - 2.4. Distribución asintótica. Función generatriz.
  - 2.5. Estados absorbentes. Distribución cuasi-estacionaria.
  - 2.6. Simulación estocástica. Algoritmo de Gillespie.
3. Aproximación de ruido lineal.
  - 3.1. Propagación de epidemias.
  - 3.2. Aproximación de ruido lineal: desarrollo de Van Kampen.
  - 3.3. Ecuación macroscópica. Ecuación de Fokker-Planck.
  - 3.4. Fenómenos de difusión.
4. Ecuaciones diferenciales estocásticas.
  - 4.1. Movimiento Browniano.
  - 4.2. Proceso de Wiener. Continuidad y diferenciabilidad.
  - 4.3. Integral del proceso de Wiener. Interpretaciones de Ito y Stratonovich.
  - 4.4. Movimiento Browniano geométrico. Ecuación de Black-Scholes.
  - 4.5. Método de integración de Euler-Maruyama.

## 6. Cronograma

### 6.1. Cronograma de la asignatura \*

Sem	Actividad tipo 1	Actividad tipo 2	Tele-enseñanza	Actividades de evaluación
1	<p><b>Modelo de herencia genética de Fisher-Wright.</b> Duración: 03:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Cadenas de Markov en tiempo discreto. Definiciones y repaso de propiedades.</b> Duración: 02:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p>			
2	<p><b>Dinámica temporal. Distribución asintótica. Recurrencia y regularidad. Teorema de Perron-Fröbenius.</b> Duración: 03:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Ejercicios de cadenas de Markov en tiempo discreto.</b> Duración: 02:00 PR: Actividad del tipo Clase de Problemas</p>			
3	<p><b>Accesibilidad en cadenas de Markov en tiempo discreto. Tiempos de primer paso.</b> Duración: 02:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Cadenas de Markov en tiempo discreto. Ejercicios conceptuales y con ordenador.</b> Duración: 03:00 PL: Actividad del tipo Prácticas de Laboratorio</p>			
4	<p><b>Desintegración radioactiva. Cinética de reacciones químicas. Modelos poblacionales.</b> Duración: 03:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Cadenas de Markov en tiempo continuo. Definiciones y propiedades. Ecuación de Kolmogorov hacia adelante.</b> Duración: 02:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p>			
5	<p><b>Ecuación de Kolmogorov hacia adelante. Ecuación de Kolmogorov hacia atrás.</b> Duración: 02:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Resolución de problemas de cadenas de Markov en tiempo continuo.</b> Duración: 02:00</p>			

	<p>PR: Actividad del tipo Clase de Problemas</p> <p><b>Distribución asintótica de una cadena de Markov en tiempo continuo.</b> Duración: 01:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p>			
6	<p><b>Función generatriz para una población en crecimiento logístico.</b> Duración: 03:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Estados absorbentes. Distribución cuasi-estacionaria.</b> Duración: 02:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p>			
7	<p><b>Resolución de problemas de cadenas de Markov en tiempo continuo.</b> Duración: 01:30 PR: Actividad del tipo Clase de Problemas</p> <p><b>Simulación estocástica. Algoritmo de Gillespie.</b> Duración: 01:30 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Simulación estocástica: casos prácticos con R.</b> Duración: 02:00 PL: Actividad del tipo Prácticas de Laboratorio</p>			
8	<p><b>Modelos estocásticos de propagación de epidemias.</b> Duración: 03:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Aproximación de ruido lineal. Desarrollo de van Kampen.</b> Duración: 02:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p>			
9	<p><b>Desarrollo de van Kampen. Ecuación macroscópica.</b> Duración: 01:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Ecuación de Fokker-Planck para el ruido. Resolución. Ruido gaussiano.</b> Duración: 02:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Examen práctico: temas 1 y 2.</b> Duración: 02:00 OT: Otras actividades formativas / Evaluación</p>			<p><b>Examen práctico: temas 1 y 2.</b> EP: Técnica del tipo Examen de Prácticas Evaluación Progresiva Presencial Duración: 02:00</p>
10	<p><b>Aproximación de ruido lineal. Ejercicios conceptuales y con ordenador.</b> Duración: 02:00 PL: Actividad del tipo Prácticas de Laboratorio</p> <p><b>Fenómenos de difusión.</b> Duración: 03:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p>			

11	<p><b>Movimiento Browniano.</b> Duración: 02:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Proceso de Wiener. Continuidad y diferenciabilidad. Integral del proceso de Wiener.</b> Duración: 03:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p>			
12	<p><b>Interpretaciones de Ito y Stratonovich. Regla de derivación de Ito.</b> Duración: 02:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Resolución de problemas del proceso de Wiener.</b> Duración: 01:00 PR: Actividad del tipo Clase de Problemas</p> <p><b>Movimiento Browniano geométrico. Ecuación de Black-Scholes.</b> Duración: 02:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p>			
13	<p><b>Ecuación de Black-Scholes. Ejercicios conceptuales y con ordenador.</b> Duración: 01:30 PL: Actividad del tipo Prácticas de Laboratorio</p> <p><b>Resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas.</b> Duración: 01:30 PR: Actividad del tipo Clase de Problemas</p> <p><b>Método de integración de Euler-Maruyama con R.</b> Duración: 02:00 PL: Actividad del tipo Prácticas de Laboratorio</p>			
14	<p><b>Presentación de trabajos de la asignatura.</b> Duración: 03:00 OT: Otras actividades formativas / Evaluación</p> <p><b>Resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas.</b> Duración: 02:00 PR: Actividad del tipo Clase de Problemas</p>			<p><b>Presentación de trabajos de la asignatura.</b> PG: Técnica del tipo Presentación en Grupo Evaluación Progresiva Presencial Duración: 03:00</p>
15	<p><b>Ecuaciones diferenciales estocásticas en finanzas. Ejercicios conceptuales y con ordenador.</b> Duración: 02:00 PL: Actividad del tipo Prácticas de Laboratorio</p>			

16				<b>Examen escrito.</b> EX: Técnica del tipo Examen Escrito Evaluación Progresiva Presencial Duración: 03:00
17				<b>Examen global.</b> EP: Técnica del tipo Examen de Prácticas Evaluación Global Presencial Duración: 03:00

Para el cálculo de los valores totales, se estima que por cada crédito ECTS el alumno dedicará dependiendo del plan de estudios, entre 26 y 27 horas de trabajo presencial y no presencial.

## 7. Actividades y criterios de evaluación

### 7.1. Actividades de evaluación de la asignatura

#### 7.1.1. Evaluación (progresiva)

Sem.	Descripción	Modalidad	Tipo	Duración	Peso en la nota	Nota mínima	Competencias evaluadas
9	Examen práctico: temas 1 y 2.	EP: Técnica del tipo Examen de Prácticas	Presencial	02:00	30%	3 / 10	CE8 CG4 CE6 CE7 CB3 CB4
14	Presentación de trabajos de la asignatura.	PG: Técnica del tipo Presentación en Grupo	Presencial	03:00	30%	3 / 10	CB3 CB4 CE10 CG5 CT1 CT8 CT2 CT4
16	Examen escrito.	EX: Técnica del tipo Examen Escrito	Presencial	03:00	40%	4 / 10	CB3 CB4 CE8 CG4 CE6 CE7 CT4 CE5

#### 7.1.2. Prueba evaluación global

Sem	Descripción	Modalidad	Tipo	Duración	Peso en la nota	Nota mínima	Competencias evaluadas
17	Examen global.	EP: Técnica del tipo Examen de Prácticas	Presencial	03:00	100%	5 / 10	CB3 CB4 CE8 CG4 CG5 CE5 CE6 CE7 CT2 CT4

### 7.1.3. Evaluación convocatoria extraordinaria

Descripción	Modalidad	Tipo	Duración	Peso en la nota	Nota mínima	Competencias evaluadas
Examen	EP: Técnica del tipo Examen de Prácticas	Presencial	03:00	100%	5 / 10	

## 7.2. Criterios de evaluación

La evaluación progresiva (EP) constará de:

- Un examen escrito y práctico que se resolverá con ayuda del ordenador, donde se aplicarán los conocimientos adquiridos en los dos primeros temas, con un peso del 30%. Se requiere una nota mínima de 3 sobre 10 para realizar el promedio con las demás partes. Se realizará a mitad del cuatrimestre.
- Un examen escrito y práctico, donde se aplicarán los conocimientos adquiridos en toda la asignatura, con un peso del 40%. Se requiere una nota mínima de 4 sobre 10 para realizar el promedio con las demás partes.
- La elaboración y presentación de un trabajo por grupos, sobre casos prácticos de modelización de fenómenos estocásticos, con un peso del 30%. Se requiere una nota mínima de 3 sobre 10 para realizar el promedio con las demás partes.

Para optar a la evaluación progresiva será necesario haber realizado los dos exámenes y el trabajo. Si la calificación del primer examen no es superior a 3 sobre 10, esta parte se considerará no aprobada y tendrá que recuperarse el día de la convocatoria ordinaria.

Los estudiantes que tengan una nota de EP mayor o igual que 5 sobre 10 habrán superado la asignatura.

Los alumnos que no superen la evaluación progresiva dispondrán de una prueba global en la convocatoria ordinaria según el calendario de exámenes publicado por la ETSIAAB. La prueba consistirá en un examen escrito con un peso del 70%, y la resolución de varios ejercicios prácticos con ordenador, que en total tendrán un peso del 30% de la nota final. Esta segunda parte sustituirá el primer examen de teoría (temas 1 y 2) para aquellos alumnos que no lo hubieran superado por el sistema de EP.

La prueba global en convocatoria extraordinaria se realizará según el calendario de exámenes publicado por la ETSIAAB. La prueba consistirá en un examen escrito con un peso del 50%, y la resolución de varios ejercicios prácticos con ordenador, que en total tendrán un peso del 50% de la nota final.

## 8. Recursos didácticos

### 8.1. Recursos didácticos de la asignatura

Nombre	Tipo	Observaciones
Howard M. Taylor and Samuel Karlin. An Introduction to Stochastic Modeling (3rd edition). Academic Press, 1990.	Bibliografía	Libro de texto de referencia para los dos primeros temas.
R y RStudio.	Otros	Entorno de programación con aplicación a estadística.
Linda J. S. Allen. An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology (2nd edition). CRC Press, 2010.	Bibliografía	Libro de referencia para los temas 1, 2 y 4.
N. G. van Kampen. Stochastic Processes in Physics and Chemistry (3rd edition). Elsevier, 2001	Bibliografía	Libro de consulta avanzado, y de referencia para el tema 3.
Robert P. Dobrow. Introduction to Stochastic Processes with R. Wiley, 2016	Bibliografía	Aplicaciones de procesos estocásticos con ejemplos en R.
Crispin W. Gardiner. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry, and the Natural Sciences (4th edition). Springer, 1997	Bibliografía	Libro de consulta avanzado.

## 9. Otra información

---

### 9.1. Otra información sobre la asignatura

La comunicación con los estudiantes se realizará siempre a través de la cuenta @alumnos.upm.es. El canal de comunicación de la asignatura será Moodle.

La asignatura está relacionada con los siguientes Objetivos de Desarrollo Sostenible:

- ODS 4: Educación de calidad.
- ODS 9: Industria, innovación e infraestructura.