



UNIVERSIDAD  
POLITÉCNICA  
DE MADRID

PROCESO DE  
COORDINACIÓN DE LAS  
ENSEÑANZAS PR/CL/001

Escuela Politécnica de  
Enseñanza Superior

# ANX-PR/CL/001-01

## GUÍA DE APRENDIZAJE

### ASIGNATURA

**305000118 - Geometría II**

### PLAN DE ESTUDIOS

30GM - Grado En Matematicas

### CURSO ACADÉMICO Y SEMESTRE

2024/25 - Primer semestre

## Índice

---

### Guía de Aprendizaje

1. Datos descriptivos.....	1
2. Profesorado.....	1
3. Conocimientos previos recomendados.....	2
4. Competencias y resultados de aprendizaje.....	2
5. Descripción de la asignatura y temario.....	4
6. Cronograma.....	6
7. Actividades y criterios de evaluación.....	9
8. Recursos didácticos.....	13

## 1. Datos descriptivos

---

### 1.1. Datos de la asignatura

<b>Nombre de la asignatura</b>	305000118 - Geometría II
<b>No de créditos</b>	6 ECTS
<b>Carácter</b>	Obligatoria
<b>Curso</b>	Tercero curso
<b>Semestre</b>	Quinto semestre
<b>Período de impartición</b>	Septiembre-Enero
<b>Idioma de impartición</b>	Castellano
<b>Titulación</b>	30GM - Grado en Matematicas
<b>Centro responsable de la titulación</b>	30 - Escuela Politecnica De Enseñanza Superior
<b>Curso académico</b>	2024-25

## 2. Profesorado

---

### 2.1. Profesorado implicado en la docencia

<b>Nombre</b>	<b>Despacho</b>	<b>Correo electrónico</b>	<b>Horario de tutorías *</b>
Alfonso Zamora Saiz (Coordinador/a)		alfonso.zamora@upm.es	Sin horario. Solicitar por correo electrónico

\* Las horas de tutoría son orientativas y pueden sufrir modificaciones. Se deberá confirmar los horarios de tutorías con el profesorado.

## 2.3. Profesorado externo

Nombre	Correo electrónico	Centro de procedencia
María Jesús Vázquez Gallo	mariajesus.vazquez@upm.es	ETSI Caminos Canales y Puertos

## 3. Conocimientos previos recomendados

---

### 3.1. Asignaturas previas que se recomienda haber cursado

- Álgebra Lineal
- Geometría I

### 3.2. Otros conocimientos previos recomendados para cursar la asignatura

El plan de estudios Grado en Matemáticas no tiene definidos otros conocimientos previos para esta asignatura.

## 4. Competencias y resultados de aprendizaje

---

### 4.1. Competencias

CE1 - Comprender y utilizar el lenguaje matemático. Adquirir la capacidad para enunciar propiedades en distintos campos de la Matemática, para construir argumentaciones, elaborar cálculos y para transmitir los conocimientos matemáticos adquiridos.

CE2 - Conocer y comprender demostraciones rigurosas de los principales teoremas de cada área de la Matemática y extraer de ellos corolarios mediante la particularización a casos concretos.

CE3 - Asimilar la definición de un nuevo objeto matemático, en términos de otros ya conocidos, y ser capaz de utilizar este objeto en diferentes contextos.

CE4 - Abstraer las propiedades estructurales de objetos matemáticos, de la realidad observada o de otros ámbitos distinguiéndolas de aquellas puramente ocasionales.

CE5 - Comprobar con demostraciones hipótesis sobre un objeto matemático o refutarlas con contraejemplos, así como identificar errores en razonamientos incorrectos.

CE6 - Proponer, analizar, validar e interpretar modelos matemáticos de sistemas reales, utilizando las herramientas matemáticas más adecuadas a los fines que se persigan, explicitando las características del sistema recogidas en el modelo y las no consideradas en el mismo.

CE7 - Resolver problemas de Matemáticas, mediante habilidades de cálculo básico y tecnologías de computación, planificando su resolución en función de las herramientas de que se disponga y de las restricciones de tiempo y recursos.

CG1 - Identificar la naturaleza, métodos y fines de los distintos campos de la Matemática y asociarlos con cierta perspectiva histórica de su desarrollo.

CG2 - Reconocer la presencia de la Matemática subyacente en la Naturaleza, en la Ciencia, en la Tecnología y en el Arte. Reconocer a la Matemática como parte integrante de la Educación y la Cultura.

CG3 - Utilizar las capacidades analíticas y de abstracción, la intuición y el pensamiento lógico y riguroso desarrolladas a través del estudio de la Matemática en contextos tanto matemáticos como no matemáticos.

CG4 - Utilizar los conocimientos teóricos y prácticos adquiridos en la definición y planteamiento de problemas y en la búsqueda de sus soluciones tanto en contextos académicos como profesionales.

CG5 - Sintetizar conocimientos y habilidades adquiridas en el campo de la matemática en diferentes materias del plan de estudios para enfocarlas en posteriores estudios especializados, tanto en una disciplina matemática como en cualquiera de las ciencias que requieran buenos fundamentos matemáticos.

## 4.2. Resultados del aprendizaje

RA161 - Utilizar argumentos de la geometría proyectiva para resolver problemas geométricos e identificar sus aplicaciones.

RA162 - Distinguir propiedades invariantes por los grupos asociados a las geometrías euclídea, afín y proyectiva.

RA163 - Clasificar proyectivamente las homografías de la recta y del plano.

RA164 - Clasificar las cónicas y cuádricas proyectiva, afín y métricamente.

RA160 - Describir los elementos y resultados de la geometría proyectiva.

## 5. Descripción de la asignatura y temario

---

### 5.1. Descripción de la asignatura

Geometría II es una asignatura que incluye los contenidos clásicos de la Geometría Proyectiva y engloba a las geometrías lineal, euclídea y afín estudiadas en los dos primeros semestres del grado.

El programa de contenidos consta de tres bloques. El primero, que comprende los temas 1 y 2, se ocupa de los espacios y de los morfismos de la geometría a estudiar. En los espacios estudiaremos referencias y coordenadas, subespacios y ecuaciones. En los morfismos estudiaremos la representación matricial de aplicaciones proyectivas y su clasificación. Especial atención merece la relación del espacio afín como inmersión en el proyectivo. Se dedica un epígrafe a la geometría afín en cada uno de estos dos capítulos, así como incluimos el estudio de la razón doble como invariante proyectivo, y su relación con la razón simple afín. El tema finaliza con una sección dedicada al programa de Erlangen que describe la geometría proyectiva como unificadora de las geometrías afín y euclídea. El tema 3 se ocupa de la geometría cuadrática, describiendo la clasificación tanto métrica, como afín y proyectiva (y las relaciones entre ellas) de las cónicas y superficies cuádricas en dimensión 2 y 3. El tema 4 se ocupa del principio de dualidad proyectiva, la gran joya de esta geometría, y se estudian algunas de sus aplicaciones principales.

La metodología a seguir será el desarrollo de los resultados desde la definición de espacio proyectivo hasta el final, con ejemplos tanto teóricos como de cálculo que los ilustren. Se propondrán hojas de problemas de corte teórico y numérico para que los alumnos las resuelvan. Especial importancia tiene la visualización en geometría, saber representar pictóricamente ciertas construcciones en dimensión baja, e incluso realizar representaciones de elementos y propiedades de una dimensión mayor que puedan ser capturados en baja dimensión. Para ello incluiremos GeoGebra, software especializado en visualización geométrica, para la aplicación de algunos de los contenidos aprendidos en el curso.

## 5.2. Temario de la asignatura

### 1. Espacios Proyectivos.

- 1.1. El espacio proyectivo.
- 1.2. Referencias proyectivas y coordenadas homogéneas.
- 1.3. Subespacios proyectivos. Operaciones con subespacios Ecuaciones de subespacios proyectivos.
- 1.4. Completación proyectiva de espacios afines, referencias afines y subespacios afines.

### 2. Aplicaciones Proyectivas.

- 2.1. Aplicaciones proyectivas y representación matricial. Puntos fijos y subespacios invariantes.
- 2.2. Completación proyectiva de aplicaciones afines.
- 2.3. Algunas aplicaciones proyectivas. Elaciones y homologías. Proyecciones cónicas. Proyectividades involutivas.
- 2.4. Clasificación de proyectividades en la recta y en el plano proyectivo.
- 2.5. Razón doble.
- 2.6. Programa de Erlangen. Grupos de transformaciones. Relaciones entre las geometrías euclídea, afín y proyectiva. Geometrías no euclídeas.

### 3. Cónicas y cuádricas.

- 3.1. Descripción métrica de las cónicas. Cónicas como lugares geométricos. Secciones cónicas.
- 3.2. Clasificación de cuádricas afines. Cónicas del plano afín. Superficies cuádricas afines.
- 3.3. Clasificación de cuádricas proyectivas. Cónicas del plano proyectivo. Superficies cuádricas proyectivas.
- 3.4. Completación proyectiva de cuádricas afines.

### 4. Dualidad.

- 4.1. El espacio proyectivo dual. Dualidad canónica.
- 4.2. Aplicaciones del principio de dualidad. Puntos fijos e hiperplanos invariantes. Haces de hiperplanos. Colineaciones y correlaciones. Relación entre correlaciones y cuádricas proyectivas.

## 6. Cronograma

### 6.1. Cronograma de la asignatura \*

Sem	Actividad tipo 1	Actividad tipo 2	Tele-enseñanza	Actividades de evaluación
1	<b>Clases Teoría y Práctica Tema 1</b> Duración: 02:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral			
2	<b>Clases Teoría y Práctica Tema 1</b> Duración: 04:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral  <b>Práctica GeoGebra</b> Duración: 01:00 PL: Actividad del tipo Prácticas de Laboratorio			
3	<b>Clases Teoría y Práctica Tema 1</b> Duración: 04:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral  <b>Clases Problemas Tema 1</b> Duración: 01:00 PR: Actividad del tipo Clase de Problemas			
4	<b>Clases Teoría y Práctica Tema 1</b> Duración: 02:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral  <b>Clases Problemas Tema 1</b> Duración: 01:00 PR: Actividad del tipo Clase de Problemas  <b>Clases Teoría y Práctica Tema 2</b> Duración: 02:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral			<b>Entrega problemas resueltos Tema 1</b> TI: Técnica del tipo Trabajo Individual Evaluación Progresiva No presencial Duración: 00:00
5	<b>Clases Teoría y práctica Tema 2</b> Duración: 04:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral  <b>Práctica GeoGebra</b> Duración: 01:00 PL: Actividad del tipo Prácticas de Laboratorio			
6	<b>Clases Teoría y Práctica Tema 2</b> Duración: 04:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral  <b>Clases Problemas Tema 2</b> Duración: 01:00 PR: Actividad del tipo Clase de Problemas			

7	<p><b>Clases Teoría y Práctica Tema 2</b> Duración: 04:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Clases Problemas Tema 2</b> Duración: 01:00 PR: Actividad del tipo Clase de Problemas</p>			<p><b>Entrega problemas resueltos Tema 2-a</b> TI: Técnica del tipo Trabajo Individual Evaluación Progresiva No presencial Duración: 00:00</p>
8	<p><b>Clases Teoría y Práctica Tema 2</b> Duración: 04:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Clases Problemas Tema 2</b> Duración: 01:00 PR: Actividad del tipo Clase de Problemas</p>			
9	<p><b>Clases Teoría y Práctica Tema 2</b> Duración: 04:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Práctica GeoGebra</b> Duración: 01:00 PL: Actividad del tipo Prácticas de Laboratorio</p>			
10	<p><b>Clases Teoría y Práctica Tema 2</b> Duración: 02:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Clases Problemas Tema 2</b> Duración: 01:00 PR: Actividad del tipo Clase de Problemas</p> <p><b>Clases Teoría y Práctica Tema 3</b> Duración: 02:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p>			<p><b>Entrega problemas resueltos Tema 2-b</b> TI: Técnica del tipo Trabajo Individual Evaluación Progresiva No presencial Duración: 00:00</p>
11	<p><b>Clases Teoría y Práctica Tema 3</b> Duración: 04:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Clases Problemas Tema 3</b> Duración: 01:00 PR: Actividad del tipo Clase de Problemas</p>			
12	<p><b>Clases Teoría y Práctica Tema 3</b> Duración: 04:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Práctica GeoGebra</b> Duración: 01:00 PL: Actividad del tipo Prácticas de Laboratorio</p>			
13	<p><b>Clases Teoría y Práctica Tema 4</b> Duración: 04:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Clases Problemas Temas 3 y 4</b> Duración: 01:00 PR: Actividad del tipo Clase de Problemas</p>			<p><b>Entrega problemas resueltos Tema 3</b> TI: Técnica del tipo Trabajo Individual Evaluación Progresiva No presencial Duración: 00:00</p>

14	<p><b>Clases Teoría y Práctica Tema 4</b> Duración: 04:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Clases Problemas Tema 4</b> Duración: 01:00 PR: Actividad del tipo Clase de Problemas</p>			
15	<p><b>Clases Teoría y Práctica Tema 4</b> Duración: 04:00 LM: Actividad del tipo Lección Magistral</p> <p><b>Práctica GeoGebra</b> Duración: 01:00 PL: Actividad del tipo Prácticas de Laboratorio</p>			<p><b>Entrega Prácticas GeoGebra</b> TI: Técnica del tipo Trabajo Individual Evaluación Progresiva y Global No presencial Duración: 00:00</p>
16				<p><b>Entrega problemas resueltos Tema 4</b> TI: Técnica del tipo Trabajo Individual Evaluación Progresiva No presencial Duración: 00:00</p>
17				<p><b>Examen final ordinario</b> EX: Técnica del tipo Examen Escrito Evaluación Progresiva Presencial Duración: 03:00</p> <p><b>Examen Final Ordinario</b> EX: Técnica del tipo Examen Escrito Evaluación Global Presencial Duración: 03:00</p>

Para el cálculo de los valores totales, se estima que por cada crédito ECTS el alumno dedicará dependiendo del plan de estudios, entre 26 y 27 horas de trabajo presencial y no presencial.

## 7. Actividades y criterios de evaluación

### 7.1. Actividades de evaluación de la asignatura

#### 7.1.1. Evaluación (progresiva)

Sem.	Descripción	Modalidad	Tipo	Duración	Peso en la nota	Nota mínima	Competencias evaluadas
4	Entrega problemas resueltos Tema 1	TI: Técnica del tipo Trabajo Individual	No Presencial	00:00	5%	/ 10	CG1 CG5 CG2 CG3 CG4 CE1 CE2 CE3 CE4 CE5 CE6 CE7
7	Entrega problemas resueltos Tema 2-a	TI: Técnica del tipo Trabajo Individual	No Presencial	00:00	5%	/ 10	CG1 CG5 CG2 CG3 CG4 CE1 CE2 CE3 CE4 CE5 CE6 CE7
10	Entrega problemas resueltos Tema 2-b	TI: Técnica del tipo Trabajo Individual	No Presencial	00:00	5%	/ 10	CG1 CG5 CG2 CG3 CG4 CE1 CE2 CE3 CE4 CE5 CE6 CE7

13	Entrega problemas resueltos Tema 3	TI: Técnica del tipo Trabajo Individual	No Presencial	00:00	5%	/ 10	CG5 CG2 CG3 CG4 CE1 CE2 CG1 CE3 CE4 CE5 CE6 CE7
15	Entrega Prácticas GeoGebra	TI: Técnica del tipo Trabajo Individual	No Presencial	00:00	10%	/ 10	CG1 CG5 CG2 CG3 CG4 CE1 CE2 CE3 CE4 CE5 CE6 CE7
16	Entrega problemas resueltos Tema 4	TI: Técnica del tipo Trabajo Individual	No Presencial	00:00	5%	/ 10	CG1 CG5 CG2 CG3 CG4 CE1 CE2 CE3 CE4 CE5 CE6 CE7
17	Examen final ordinario	EX: Técnica del tipo Examen Escrito	Presencial	03:00	65%	3.5 / 10	CG1 CG5 CG2 CG3 CG4 CE1 CE2 CE3 CE4 CE5 CE6 CE7

### 7.1.2. Prueba evaluación global

Sem	Descripción	Modalidad	Tipo	Duración	Peso en la nota	Nota mínima	Competencias evaluadas
15	Entrega Prácticas GeoGebra	TI: Técnica del tipo Trabajo Individual	No Presencial	00:00	10%	/ 10	CG1 CG5 CG2 CG3 CG4 CE1 CE2 CE3 CE4 CE5 CE6 CE7
17	Examen Final Ordinario	EX: Técnica del tipo Examen Escrito	Presencial	03:00	90%	3.5 / 10	CG1 CG5 CG2 CG3 CG4 CE1 CE2 CE3 CE4 CE5 CE6 CE7

### 7.1.3. Evaluación convocatoria extraordinaria

Descripción	Modalidad	Tipo	Duración	Peso en la nota	Nota mínima	Competencias evaluadas
Examen Final Extraordinario	EX: Técnica del tipo Examen Escrito	Presencial	03:00	90%	4 / 10	CG1 CG5 CG2 CG3 CG4 CE1 CE2 CE3 CE4 CE5 CE6

						CE7
Entrega Prácticas GeoGebra	TI: Técnica del tipo Trabajo Individual	Presencial	00:00	10%	/ 10	CG1 CG3 CG4 CE4 CE6 CE7 CG2 CE1 CE3 CE5 CG5 CE2

## 7.2. Criterios de evaluación

La **evaluación progresiva** consta de 3 partes:

- **5 Entregas de Problemas Resueltos**, cada una cuenta un 5%, en total un 25%.

Cada día tras las clases teóricas se añadirán problemas a un listado de Moodle, a entregar en las fechas indicadas.

- **Entrega Memoria Prácticas GeoGebra**, que cuentan un 10%. Actividad **no recuperable** en el examen final ordinario ni en el extraordinario.

Se realizarán 5 sesiones de prácticas de Laboratorio para visualizar en GeoGebra los contenidos del curso. Los alumnos realizarán una memoria de estas prácticas que entregarán tras cada una de las sesiones.

- **Examen Final Ordinario**, que cuenta un 65%.

Será un examen en la fecha indicada en enero con ejercicios teóricos y prácticos sobre todos los contenidos de la asignatura.

La **evaluación mediante prueba global** consiste en el **Examen Final Ordinario**, que cuenta un 90%, examen en la fecha indicada en enero con ejercicios teóricos y prácticos sobre todos los contenidos de la asignatura, y la entrega de la Memoria Prácticas GeoGebra, que cuenta un 10%.

Para aprobar la asignatura en la convocatoria ordinaria hay que obtener una calificación igual o superior a 5 sobre 10 como resultado de

máximo { 90% Examen Final Ordinario + 10% Prácticas GeoGebra , 65% Examen Final Ordinario + 25% Entregas Problemas + 10% Prácticas GeoGebra }

siempre que se haya obtenido al menos un 3.5 en el Examen Final Ordinario.

Los alumnos que no hayan superado la asignatura en la convocatoria ordinaria, tendrán la opción de realizar un **Examen final extraordinario** en junio. Este será un único examen que contará un 90% de la nota final con ejercicios teóricos y prácticos sobre todos los contenidos de la asignatura, siendo el otro 10% restante el correspondiente a la Memoria de Prácticas de GeoGebra que ya haya sido entregada durante el curso. Para aprobar la asignatura mediante la evaluación final extraordinaria hay que obtener una calificación igual o superior a 5 sobre 10 sumando las 2 partes con las ponderaciones indicadas, siempre que se haya obtenido al menos un 4 en el examen final extraordinario.

## 8. Recursos didácticos

---

### 8.1. Recursos didácticos de la asignatura

Nombre	Tipo	Observaciones
Beutelspacher, A. y Rosenbaum, U. Projective Geometry: From Foundations to Applications, Cambridge University Press. (1998).	Bibliografía	
Fernando Galván, J.F. y Gamboa, J.M. Geometría lineal. Espacios afines y proyectivos, Sanz y Torres (2017).	Bibliografía	

Fortuna, E, Frigerio, R. y Pardini, R. Projective Geometry. Solved problems and theory review. Colección La Matematica per il 3+2. Springer (2016).	Bibliografía	
Navarro González, J.A. Notes for a Licenciatura, Open Math Notes, AMS (2020).	Bibliografía	
Rodríguez Sanjurjo, J.M. y Ruiz Sancho, J. M. Lecciones de geometría proyectiva, Sanz y Torres (2009).	Bibliografía	
Zamora Saiz, A. y Barge Yáñez, H. Geometría Afín y Proyectiva, Sanz y Torres (2022).	Bibliografía	
GeoGebra	Recursos web	<a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a>